TEORIA DA MEDIDA

Mauro S. de F. Marques

TEORIA DA MEDIDA

EDITORA UNICAMP

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO
SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNICAMP
DIRETORIA DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

M348t Marques, Mauro S. de F.
Teoria da medida / Mauro S. de F. Marques. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2009.

1. Teoria das medidas. 2. Lebesgue, Integrais de. 3. Integrais (Matemática). I. Título.

CDD 511.322
ISBN 978-85-268-0840-9 515.43

Índices para catálogo sistemático:

1. Teoria das medidas 511.322
2. Lebesgue, Integrais de 515.43
3. Integrais (Matemática) 515.43

Editora da Unicamp
Rua Caio Graco Prado, 50 – Campus Unicamp
Caixa Postal 6074 – Barão Geraldo
CEP 13083-892 – Campinas – SP – Brasil
Tel./Fax: (19) 3521-7718/7728
www.editora.unicamp.br – vendas@editora.unicamp.br

Para Eliana, Gabriel e Lucas.

Sumário

Prefácio

Este livro é resultado de incontáveis revisões das notas de aula para as disciplinas Probabilidade Avançada e Teoria da Medida do programa de pós-graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP por mim ministradas desde 1988. As duas disciplinas têm como objetivo preparar estudantes interessados em estudos avançados de probabilidade, estatística e cálculo estocástico.

Nessas disciplinas perfis contrastantes de estudantes foram encontrados. De um lado, alunos do programa de estatística com forte intuição para as aplicações, devido a estudos prévios de probabilidade e estatística, mas com pouca ou nenhuma formação em análise matemática. Em contraste, alunos do programa de matemática pura com excelente base matemática, mas sem conhecimentos prévios de probabilidade.

Diante desse cenário o texto foi elaborado assumindo pré-requisitos mínimos de cálculo avançado ou introdução à análise real e noções elementares de cálculo proposicional, em particular o uso dos conectivos “e” ($\wedge$), “ou” ($\vee$), “implicação lógica” ($\Rightarrow$) e “equivalência lógica” ($\Leftrightarrow$) e dos quantificadores “para todo” ($\forall$), “existe” ($\exists$) e “tal que” ($\ni$). Assim, há um excesso de detalhes nas demonstrações, talvez desnecessários para aqueles com formação matemática sólida. Escolheu-se enfatizar exaustivamente os aspectos particulares da teoria da medida em prejuízo daqueles de natureza topológica e algébrica. Apenas noções sobre limites de seqüências e séries, conjuntos abertos e fechados e o conhecimento do Teorema de Heine-Borel, aspectos usualmente estudados nos pré-requisitos mencionados, se fazem necessários. Dadas essas características particulares, foram eliminadas referências à literatura.

Além da influência de meus mestres Stamatis Cambanis, Malcom Leadbetter, Gopinath Kallianpur e Charles Baker e de infindáveis discussões com Victor Perez-Abreu, alguns alunos, em diferentes épocas, tiveram participação importante no enfoque, formato, grau de detalhamento das demonstrações e nas escolhas dos exercícios. Em particular, agradeço aos ex-alunos, hoje todos doutores, Antonio Eduardo Gomes, Elaine Borghi, Patricia Gimenez, Marcelo Freire e Simão Stelmasthuk.

Finalmente, espero que este livro cumpra o objetivo de fornecer uma formação básica sólida para aqueles com interesse em estudos avançados nas áreas de probabilidade, estatística matemática, processos estocásticos e cálculo estocástico.

Mauro S. de F. Marques

Capítulo 1

Conjunto e classe de conjuntos

1.1 Definições básicas

Um *conjunto* é um agregado ou coleção de *pontos* ou *elementos*. Por exemplo, todos os números, o espaço euclidiano, conjunto de funções e o de seqüências etc.

Os conjuntos dos números naturais, inteiros, reais e complexos serão denotados respectivamente por $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

Para evitar questões pertinentes aos fundamentos lógicos da teoria de conjuntos, em um dado contexto, todos os elementos considerados serão pontos de um conjunto fixo, não-vazio, referido como espaço e denotado por Ω. Letras maiúsculas serão usadas para denotar conjuntos e minúsculas para denotar elementos. O conjunto vazio, isto é, o conjunto sem elementos, será denotado por $\emptyset$ ou $\{\ \}$.

Um conjunto pode ser bem definido por uma dada propriedade $\mathbf{P}$, ou seja, um critério para decidir quando um objeto (ponto) é ou não elemento do conjunto em questão. Assim, um conjunto pode então ser descrito na forma $\{\omega;\ \mathbf{P}(\omega)\}$, onde $\mathbf{P}(\omega)$ é a propriedade a ser satisfeita por um elemento ω do espaço, para que ele seja um elemento do conjunto.

Por *classe* entende-se um conjunto cujos elementos são conjuntos de um dado espaço, por exemplo, a classe de todos os retângulos do plano euclidiano. Classes de conjuntos serão aqui denotadas por letras caligráficas maiúsculas $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$

Coleção de classes é um conjunto cujos elementos são classes de conjuntos.

Para indicar que um ponto ω é um elemento de um conjunto A, o símbolo $\in$ é usado. Assim, $\omega \in A$, lê-se ω *pertence a* A, significa que ω é um elemento do conjunto A. Para o oposto, ω *não pertence* ao conjunto A, escreve-se $\omega \notin A$. Observe que o símbolo $\in$ deve sempre ser usado entre diferentes entidades lógicas, isto é, "pontos $\in$ conjuntos", "conjuntos $\in$ classes", "classes $\in$ coleções" etc.

A notação $A \subset B$, lê-se A é um *subconjunto* de B ou A *está contido* em B, significa que todo elemento de A é também um elemento de B. Assim para todo conjunto A tem-se: $A \subset \Omega$, $A \subset A$ e $\emptyset \in A$. O símbolo $\subset$ é usado entre entidades lógicas do mesmo tipo, isto é, "conjunto de pontos $\subset$ conjunto de pontos", "classe de conjuntos $\subset$ classe de conjuntos" etc.

Diz-se que

$$A = B$$

se e somente se

$$A \subset B \quad \wedge \quad B \subset A.$$

Apesar da simplicidade da definição, a demonstração de uma igualdade entre conjuntos pode requerer trabalho.

1.2 Operações elementares entre conjuntos

União, interseção e *complemento* são as três operações básicas em teoria de conjuntos. Outras operações podem ser definidas via composições e extensões.

União e interseção são operações diádicas, portanto, para defini-las, sejam A e B dois subconjuntos quaisquer do espaço Ω. A *união* de dois conjuntos A e B, escrita como $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos em A ou em B (ou em ambos):

$$A \cup B = \{\omega : \omega \in A \ \vee \ \omega \in B\}.$$

A *interseção* de dois conjuntos A e B, escrita como $A \cap B$, é o conjunto dos elementos que pertencem a ambos; pertencem a A e pertencem a B:

$$A \cap B = \{\omega : \omega \in A \ \wedge \ \omega \in B\}.$$

Dois conjuntos que não têm elementos comuns,

$$A \cap B = \emptyset,$$

são chamados *disjuntos*.

A operação *complemento* de A (em relação ao espaço Ω), escrita como A^c, é definida como o conjunto de todos os elementos do espaço Ω que não são elementos de A:

$$A^c = \{\omega : \omega \notin A\}.$$

Em particular,

$$\emptyset^c = \Omega \quad \wedge \quad \Omega^c = \emptyset.$$

Duas outras operações, *diferença* e *diferença simétrica*, são bastante úteis e podem ser expressas através de composições das operações básicas.

A *diferença* entre dois conjuntos A e B, denotada por $A \backslash B$, é o conjunto de todos os elementos de A que não pertencem a B:

$$A \backslash B = \{\omega : \omega \in A \quad \wedge \quad \omega \notin B\} = A \cap B^c.$$

Se B é subconjunto de A, $A \backslash B$ é chamada *diferença própria*.

A *diferença simétrica* entre dois conjuntos A e B, denotada por $A \triangle B$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A ou a B mas não a ambos:

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \backslash A) = (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c).$$

As operações de união e interseção entre dois conjuntos podem ser estendidas naturalmente para um número arbitrário de conjuntos. Para tanto considere uma classe de conjuntos indexada por um conjunto de índices $\mathbb{I}$,

$$\{A_\iota : A_\iota \subset \Omega, \iota \in \mathbb{I}\}.$$

Define-se

$$\cup_{\iota \in \mathbb{I}} A_\iota = \{\omega : \omega \in A_\iota \ \underline{\textit{para algum}} \ \iota \in \mathbb{I}\}$$

e

$$\cap_{\iota \in \mathbb{I}} A_\iota = \{\omega : \omega \in A_\iota \ \underline{\textit{para todo}} \ \iota \in \mathbb{I}\}.$$

Quando o conjunto de índices é um subconjunto de números inteiros, escreve-se, por exemplo, $\cup_{n=1}^{\infty}$ para $\cup_{n \in \mathbf{N}}$, $\cup_{n=1}^{N}$ para $\cup_{n \in \{1,2,\ldots,N\}}$ etc.

Claro, as operações acima definidas e exemplificadas para conjuntos de pontos podem ser aplicadas para classes de conjuntos, coleções de classes etc.

1.3 Propriedades elementares

Proposição 1.1. *Para quaisquer subconjuntos A, B e C de Ω:*

(i) Lei comutativa

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A;$$

(ii) Lei associativa

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

(iii) Lei distributiva

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

(iv) Lei de De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Demonstração: Exercício 1.1. **c.q.d.**

Corolário 1.1. *Seja $\{A_\iota; \iota \in \mathbb{I}\}$ uma classe de subconjuntos de Ω. Então,*

$$(\cup_{\iota \in \mathbb{I}} A_\iota)^c = \cap_{\iota \in \mathbb{I}} A_\iota^c \qquad \wedge \qquad (\cap_{\iota \in \mathbb{I}} A_\lambda)^c = \cup_{\iota \in \mathbb{I}} A_\iota^c.$$

Demonstração: Exercício 1.2. **c.q.d.**

1.4 Limites de seqüências de conjuntos

Seja $(A_n; n \in \mathbb{N})$ uma seqüência de subconjuntos de Ω.

O *limite inferior da seqüência de subconjuntos* $(A_n; n \in \mathbb{N})$, denotado por

$$\liminf_{n\to\infty} A_n,$$

é o conjunto de todos os elementos ω que pertencem à A_n, para todos valores de n, *exceto um número finito*, isto é,

$$\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n \Longleftrightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N} \ \ni \ \omega \in A_n \forall n \geq N_0.$$

O *limite superior da seqüência de subconjuntos* $(A_n; n \in \mathbb{N})$, denotado por

$$\limsup_{n\to\infty} A_n,$$

é o conjunto de todos os elementos ω que pertencem à A_n *para infinitos valores de* n, isto é,

$$\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n \Longleftrightarrow$$

$$\exists (n_m; m \in \mathbb{N}), n_m \leq n_{m+1} (n_m \uparrow), \ \ni \ \omega \in A_{n_m}, m = 1, 2, \ldots$$

Nas definições de limite inferior e limite superior, é importante observar que, respectivamente, tanto o número N_0 quanto a seqüência $(n_m; m \in \mathbb{N})$ dependem de ω.

Proposição 1.2. *Para qualquer seqüência* $(A_n; n \in \mathbb{N})$*:*

(i) $\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{m=n}^{\infty} A_m$ *e*

(ii) $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=n}^{\infty} A_m$.

Demonstração:

(i) $\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow$

$$\exists N_0, \ \ni \ \omega \in \cap_{m=N_0}^{\infty} A_m \Leftrightarrow \omega \in \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

(ii) $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow$

$$\exists m_{n+1} > m_n \geq 1, \ \ni \ \omega \in A_{m_n} \forall n \Leftrightarrow$$

$$\omega \in \cup_{m=n}^{\infty} A_m \forall n, \Leftrightarrow \omega \in \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

c.q.d.

Uma seqüência de conjuntos $(A_n; n \in \mathbb{N})$ é dita ser *convergente* se

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

e nesse caso o valor comum é denotado por $\lim_{n\to\infty} A_n$. Escrevendo-se

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n,$$

a notação

$$A_n \to A$$

também é utilizada.

Como, trivialmente,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n,$$

para provar convergência, somente é preciso mostrar que

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subset \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

Uma seqüência $(A_n; n \in \mathbb{N})$ é chamada *monótona crescente (decrescente)*, escreve-se $A_n \uparrow$ $(A_n \downarrow)$, se para todo n

$$A_n \subset A_{n+1} \quad (A_{n+1} \subset A_n).$$

Proposição 1.3. *Seja $(A_n; n \in \mathbb{N})$ uma seqüência monótona crescente (decrescente). Então ela é convergente e*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \quad (= \cap_{n=1}^{\infty} A_n).$$

Demonstração: Se A_n é crescente,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=n}^{\infty} A_m = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=1}^{\infty} A_m,$$

pois

$$\cup_{m=n}^{\infty} A_m = \cup_{m=1}^{\infty} A_m.$$

Como $\cup_{m=1}^{\infty} A_m$ não depende de n, segue que

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \cup_{m=1}^{\infty} A_m.$$

Por outro lado,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{m=n}^{\infty} A_m = \cup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

pois

$$\cap_{m=n}^{\infty} A_m = A_n.$$

Portanto, como requerido,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

No caso decrescente, basta observar que

$$A_n \downarrow \Longleftrightarrow A_n^c \uparrow$$

e o resultado é uma conseqüência imediata da Lei de De Morgan. **c.q.d.**

1.5 Álgebra e σ-álgebra

Classes de conjuntos são objetos essenciais na teoria da medida. Classes arbitrárias de conjuntos não são necessariamente fechadas com relação às operações de conjuntos aqui definidas, por exemplo, a união de dois conjuntos pertencentes à classe não é necessariamente um elemento da classe.

O problema estaria resolvido se sempre fosse possível trabalhar com a classe $\mathbf{2}^\Omega$ de todos os subconjuntos de Ω. Isso é factível no caso onde o espaço Ω tem um número finito de elementos, mas, quando a cardinalidade de Ω é infinita, a classe $\mathbf{2}^\Omega$ é muito "grande", o que pode inviabilizar, como será visto no próximo capítulo, o desenvolvimento de uma teoria rica.

Assim, serão consideradas subclasses menores de $\mathbf{2}^\Omega$, sendo importante no entanto que as mesmas possuam uma dada estrutura, a ser explicitada a seguir, suficientemente rica para o objetivo em questão.

Diferentes estruturas básicas para classes de conjuntos são usadas em teoria da medida. Neste texto, em prejuízo da generalidade mas visando a simplicidade, as classes básicas a serem usadas são as chamadas estruturas de *álgebra* e *σ-álgebra*.

Uma classe $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um espaço Ω é chamada uma *álgebra* (de subconjuntos) se:

(A1) $\Omega \in \mathcal{A}$;

(A2) $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathcal{A} \;\wedge$

(A3) $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathcal{A}$;

ou

(A3') $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{A}$.

Note que, sob (A2), pela Lei de De Morgan, (A3) e (A3') são equivalentes. É evidente que uma álgebra contém o conjunto vazio ($\emptyset = \Omega^c$) e é fechada com respeito a uniões e interseções de um número finito de conjuntos. Conseqüentemente, uma álgebra é fechada para operações que envolvam um número finito qualquer de aplicações das operações união, interseção e complemento, em particular, as operações diferença e diferença simétrica.

Exemplos simples de álgebras são:

$$\mathcal{A}_* = \{\emptyset, \Omega\}, \quad \mathcal{A}^* = \mathbf{2}^\Omega \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_1 = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}, \quad A \subset \Omega.$$

Um exemplo interessante é dado pela classe

$$\mathcal{A}_2 = \{A \subset \Omega : A \text{ é } finito \text{ ou } A^c \text{ é } finito\}.$$

Este último pode ser generalizado no lema a seguir.

Lema 1.1. *Seja $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ uma partição do espaço Ω, ou seja,*

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \; i \neq j \quad \wedge \quad \Omega = \cup_{i=1}^n A_i.$$

Então a classe

$$\mathcal{A} = \{\cup_{k=1}^m A_{i_k}; \{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}, A_{i_k} \in \mathcal{P}\},$$

formada por todas as uniões finitas de subconjuntos em $\mathcal{P}$, é uma álgebra.

Demonstração: Exercício 1.13. **c.q.d.**

O próximo resultado é bastante simples mas de grande utilidade para o desenvolvimento da teoria a ser apresentada nos capítulos seguintes.

Lema 1.2. *Seja $(A_n : n \geq 1)$ uma seqüência de subconjuntos em uma álgebra $\mathcal{A}$. Então existe uma seqüência $(B_n : n \geq 1)$ em $\mathcal{A}$, tal que:*

(i) $B_n \cap B_m = \emptyset$, $n \neq m$, $n, m = 1, 2, \ldots$;

(ii) $B_n \subset A_n$, $n, m = 1, 2, \ldots$ *e*

(iii) $\cup_{n=1}^\infty A_n = \cup_{n=1}^\infty B_n$.

Demonstração: Seja $(B_n : n \geq 1)$ a seguinte seqüência:

$$B_1 = A_1, \; B_2 = A_1^c \cap A_2, \ldots, B_n = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap A_n, \ldots$$

Como $\mathcal{A}$ é fechada com relação a um número finito de operações de subconjuntos, tem-se que

$$B_n \in \mathcal{A}, \; n = 1, 2, \ldots$$

As demonstrações de (i) e (ii) são imediatas. Para mostrar (iii), note inicialmente que:

$$\omega \in \cup_{n=1}^\infty A_n \Longleftrightarrow \exists n \ni \omega \in A_n.$$

Seja

$$n_0 = \min\{n : \omega \in A_n\},$$

logo

$$\omega \in B_{n_o} = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n_0-1}^c \cap A_{n_0} \Longrightarrow \omega \in \cup_{n=1}^\infty B_n.$$

Por outro lado,

$$\omega \in \cup_{n=1}^\infty B_n \Longleftrightarrow \exists n \ni \omega \in B_n \subset A_n \Longrightarrow \omega \in \cup_{n=1}^\infty A_n.$$

Portanto está demonstrado que

$$\cup_{n=1}^\infty A_n = \cup_{n=1}^\infty B_n.$$

c.q.d.

Quando se trata de um número infinito, ainda que contável, de operações de conjuntos, a estrutura de álgebra não é mais suficiente. De fato, considere o exemplo dado anteriormente da álgebra $\mathcal{A}_2$ com Ω sendo o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Os conjuntos

$$A_n = \{2n\}, n = 1, 2, \ldots,$$

são finitos e portanto elementos de $\mathcal{A}_2$, mas $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$, o conjunto dos números pares, por não ser finito nem ter complementar finito, não pode ser um elemento de $\mathcal{A}_2$. Isso mostra que em geral uma álgebra não é fechada com relação a uniões infinitas. Claro que o mesmo é verdade com relação às operações de interseção, $\liminf$ e $\limsup$.

Uma classe $\mathcal{F}$ de subconjuntos de um espaço Ω é chamada uma *σ-álgebra (de subconjuntos)* se:

(F1) $\Omega \in \mathcal{A}$;

(F2) $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathcal{A}$;

(F3) $\forall\ (A_n; n \in \mathbb{N})$ *em* $\mathcal{A} \;\Rightarrow\; \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$;

ou

(F3') $\forall\ (A_n; n \in \mathbb{N})$ *em* $\mathcal{A} \;\Rightarrow\; \cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Portanto, uma σ-álgebra é uma álgebra fechada em relação a uniões contáveis. Será também fechada com relação a interseções contáveis e conseqüentemente com relação a limite inferior e limite superior.

Para a teoria a ser desenvolvida nos próximos capítulos, as estruturas de σ-álgebra são suficientes. Resta no entanto resolver o problema, nem sempre fácil, de como construir σ-álgebras apropriadas.

Em grande parte das situações, o ponto de partida para a construção de uma álgebra ou σ-álgebra é a fixação de uma classe $\mathcal{C}$ com estrutura bastante simples, ou nenhuma estrutura em particular, que tenha como elementos os subconjuntos com interesse particular para o problema em questão. Deseja-se então construir a menor álgebra ou σ-álgebra possível que contenha a classe de interesse $\mathcal{C}$. A existência de uma tal álgebra ou σ-álgebra "mínima" que contenha $\mathcal{C}$ é garantida pelos resultados seguintes.

Lema 1.3. *A interseção arbitrária de álgebras (σ-álgebras) é uma álgebra (σ-álgebra).*

Demonstração: O resultado será provado para álgebra, a demonstração para σ-álgebra é análoga.

Seja $\mathbf{\Lambda}$ uma coleção arbitrária e não-vazia de álgebras. Defina

$$\mathcal{A}_0 = \cap_{\mathcal{A} \in \mathbf{\Lambda}} \mathcal{A}.$$

Claro,

$$\Omega \in \mathcal{A}, \forall \mathcal{A} \in \Lambda \Rightarrow \Omega \in \mathcal{A}_0,$$